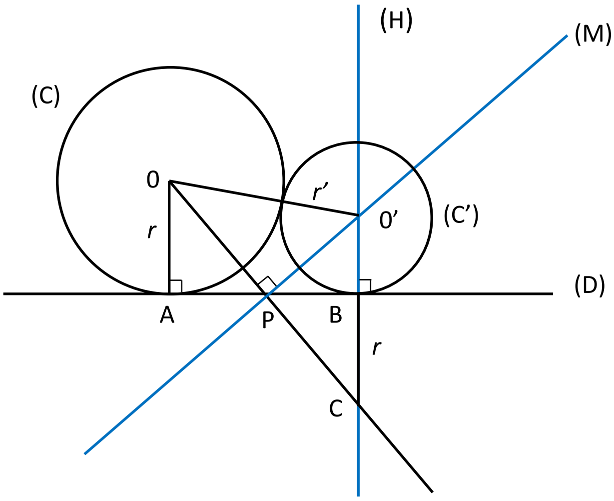
(1) Soient : (C) un cercle de rayon *r*, la tangente (D) à ce cercle en un point A, et un point B de (D) situé à la distance *a* de A. Déterminer « à la règle et au compas » le centre O' du cercle (C') tangent à (C) et à (D) en B. En déduire le rayon *r'* de (C').

Réponse : $r'=a^2/4r$

Démonstration :



Soient : (H) la droite perpendiculaire à (D) en B, O et O' les centres des cercles (C) et (C'). (H) passe par O'. Soit C le point de (H) dans le demi-plan ne contenant pas (C), tel BC=*r*. OC coupe AB en son milieu P. O'P est alors la hauteur du triangle isocèle O'OC passant par O' et sa droite support est donc la médiatrice (M) de OC.
On peut ainsi déterminer « à la règle et au compas » le centre O' de (C'), intersection de (M) et de (H).
En appliquant le théorème de Pythagore dans divers triangles rectangles ainsi formés, on obtient $r'=a^2/4r$.

(2) Le 14 octobre 1066 se déroula la fameuse bataille d'Hastings entre les Saxons, commandés par Harold, roi d'Angleterre (vers 1022-mort à Hastings) et les Normands, commandés par Guillaume le Conquérant (vers 1027-1087). Les hommes de Harold se tenaient ensemble, quelques milliers au total selon les historiens actuels, et formaient 8 carrés. Dans chaque carré, ils étaient également nombreux. Quand Harold décida de se lancer dans la mêlée, les Saxons formèrent un seul et puissant carré.
Les auteurs contemporains s'accordent à dire que les Saxons combattirent effectivement dans cette formation. Dans le Carmen de Hastingae Proelio, poème attribué à Guy de Ponthieu (vers 1014-1074 ou 1075), évêque d'Amiens, on lit : "*Les Saxons se tinrent fermes en dense masse*". Henri de Huntingdon (vers 1088-1160) parle de "*ce carré, tel une forteresse imprenable aux Normands* "
Mais combien donc pouvaient être ces Saxons ?

Suggestion : on cherchera une relation de récurrence linéaire donnant toutes les solutions à partir d'une solution initiale et on remarquera ensuite que $8=3^2-1=K^2-1$.

Réponse : **9801**

Démonstration :

Soit y^2 le nombre total de Saxons et x^2 le nombre de Saxons dans chacun des 8 carrés initialement en place. On a donc : $y^2 = 8x^2 + 1$. Il s'agit là d'une des plus célèbres des équations diophantiennes (équations algébriques à variables et paramètres entiers), qui sous sa forme générale : $y^2 = nx^2 + 1$, avec $n \in \mathrm{N}\ et \neq k^2$, est appelée *équation de Pell-Fermat*. Le *problème des bœufs d'Hélios* attribué à Archimède (vers 287 av.JC-212 av.JC) conduit à une telle équation. Elle a été d'abord étudiée par Diophane d'Alexandrie (probablement au III^ème siècle), puis par des mathématiciens indiens, Brahmagupta (598-668), puis Bhäskara II (1114-1185), et plus tard par de célèbres mathématiciens européens (Fermat, Euler, Lagrange, Gauss !) pour caractériser et trouver toutes les solutions possibles. Encore aujourd'hui, elle fait l'objet de recherches.

Il a été prouvé qu'elle possède une infinité de solutions qu'on peut déduire les unes des autres (cf. https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_de_Pell-Fermat). Dans le cas général, une méthode classique de leur obtention repose sur le développement en une fraction continue de $\sqrt{n}$.

Par ailleurs, cette équation a fait l'objet d'un défi lancé en 1657 par Fermat : $y^2 = 61x^2 + 1$, dont la solution *minimale* (cf. supra) est $y_1 = 1\,766\,319\,049$; $x_1 = 226\,153\,980$!

Notons que :

- si $(x_i,\ y_i)$ est solution, $(\pm x_i,\ \pm y_i)$ est solution. En fait, on cherche la suite des solutions telles que $(\ x_i > 0,\ y_i > 0)$;
- la solution triviale est $(x_0 = 0\ ,\ y_0 = 1)$. La première solution $(\ x_1 > 0,\ y_1 > 0)$ est appelée *solution minimale*.

On peut montrer (cf. Annexe) que deux solutions successives sont liées par une transformation linéaire régulière T, i.e. : $\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$, avec $T = \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ nx_1 & y_1 \end{pmatrix}$.

Il en résulte qu'on a donc : $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = T^i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Comme $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ est donc la seconde colonne de T^i.

Si $n = K^2 - 1,\ {y_1}^2 = n{x_1}^2 + 1 = (K^2 - 1)b^2 + 1$ a pour solution évidente : $y_1 = K$ et $x_1 = 1$. Donc : $T = \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ nx_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 1 \\ n & K \end{pmatrix}$. Dans le cas présent, $n = 8$ et $K = 3$, ce qui donne : $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

On obtient : $T^2 = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 48 & 17 \end{pmatrix}$; $T^3 = \begin{pmatrix} 99 & 35 \\ 280 & 99 \end{pmatrix}$; $T^4 = \begin{pmatrix} 577 & 204 \\ 1632 & 577 \end{pmatrix}$; $T^5 = \begin{pmatrix} 3363 & 1189 \\ 9512 & 3363 \end{pmatrix}$.

Le nombre total de Saxons peut donc être :
$y_1^2 = 3^2 = 9$; $y_2^2 = 17^2 = 289$; $y_3^2 = 99^2 = 9801$; $y_4^2 = 577^2 = 332\,929$; etc.

Comme les historiens actuels estiment que les troupes d'Harold étaient au nombre de quelques milliers, ce nombre est alors $\mathbf{9801}$, … *dont Harold et ses deux frères, Gyrth et Léofwine, qui perdirent la vie tous les trois durant cette bataille perdue par les Saxons.*

Annexe : Existence de T

L'équation de Pell-Fermat s'écrit aussi : $(x\ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ avec $A = \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ sont deux solutions, on a : $(x_{i+1}\ y_{i+1})A \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow (x_i \quad y_i)\ {}^tTAT \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = 1$.

Donc : ${}^tTAT = A$. Il en résulte que : $\det(T)^2 = 1$, soit : $\det(T) = \pm 1$.

Posons : $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. ${}^tTAT = A$ donne tous calculs faits : $\begin{pmatrix} -a^2n + c^2 & -abn + dc \\ -abn + dc & -b^2n + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient alors les trois équations suivantes : (1) $abn = dc$; (2) $c^2 = (a^2 - 1)n$; (3) $d^2 = 1 + b^2n$.

En combinant (1) élevée au carré et (3), il vient : (4) $a^2 = nb^2 + 1$. ***a* et *b* sont donc une solution de l'équation de Pell-Fermat initiale !**

En reportant(4) dans (2) et (3), on obtient : $c^2 = b^2n^2$ et $d^2 = a^2$. Si le problème de la détermination de T n'est pas résolu, toutefois il est ainsi avéré que T existe dans le cas général.

Pour $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, la solution minimale, dans le cas général on obtient la suite de solutions positives croissantes pour $T = \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ nx_1 & y_1 \end{pmatrix}$.

(3) Combien de triplets (*p*,*q*,*r*) de nombres premiers satisfont l'équation : $p+q^2+r^3=200$?

Réponse : quatre, à savoir : (71,2,5) , (167,5,2) , (71,11,2) , (23,13,2)

Démonstration :

Soit *a*,*b*,*c* trois nombres premiers et i,j,k des nombres entiers. Tous les nombres premiers sont impairs, sauf 2. Si *a* est un nombre premier, a^i est pair si $a=2$ et impair sinon. Il en résulte que $a^i+b^j+c^k$ est pair si et seulement si deux des trois nombres sont impairs et le troisième égal à 2, ou si les trois nombres sont égaux à 2. Cependant, dans ce dernier cas la solution n'est pas valide puisque $2+2^2+2^3=14$. Donc l'un des trois nombres est égal à 2.

De plus, $q<15$ et $r<6$ car $15^2>200$ et $6^3>200$. Ainsi $q=2,3,5,7,11$ ou 13 et $r=2,3$ ou 5.

Analysons les trois cas suivants :

- $p=2$, alors $q^2+r^3=198$. Si $r=3$, alors $q^2=189$ qui n'est pas un carré parfait. Si $r=5$, alors $q^2=73$ qui ne l'est pas non plus.
- $q=2$, alors $p+r^3=196$. Supposons que $r=3$. Alors $p=169$ qui n'est pas premier. Supposons que $r=5$. Alors $p=196-125=71$ qui est premier, ce qui donne la solution **(71,2,5)**.
- $r=2$, alors $p+q^2=192$. Examinons les cas correspondant aux 5 valeurs possibles de q : si $q=3$, alors $p=183$ qui n'est pas premier. Si $q=5$, alors $p=167$ qui est premier, ce qui donne la solution **(167,5,2)**. Si $q=7$, alors p=143 qui n'est pas premier. Si $q=11$, alors $p=71$ qui est premier, ce qui donne la solution **(71,11,2)**. Si $q=13$, alors $p=23$ qui est premier et on obtient la solution **(23,13,2)**.